林晟數學

108新課綱

極限與函數

1-1

數列的極限與無窮等比級數

- 數列的極限
- 無窮等比級數
- 數學歸納法

1-2

函數與函數的極限

- 函數的概念
- 函數的極限
- 極限的性質

第 1 章

極限與函數

林昆數學 1-1 數列的極限與無窮等比級數

首部曲　數列的極限

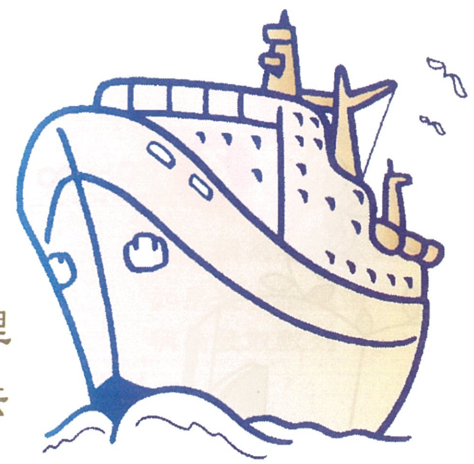
1. 基本觀念
2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型的極限
3. $\infty-\infty$ 型的極限
4. 夾擠定理
5. 直觀圖解
6. 從連續複利認識常數 e

貳部曲　無窮等比級數

1. 自然級數 Σ
2. 無窮級數的極限
3. 無窮等比級數
4. 循環小數

參部曲　數學歸納法

1. 數學歸納法基本原理
2. 不等式型數學歸納法



首部曲

數列的極限

講道理 道理說清楚，就是好的開始

Calculus，英文原先意義為計算法，在拉丁語中意為計數用的小石頭，由萊布尼茨在 17 世紀把這套學問命名為 Calculus

中文由清代數學家李善蘭翻譯成微積分，

是研究極限、微分學、積分學的一個數學分支。

微分(differential calculus)是對函數的細微變化的一種線性描述，

是一套關於變化率的理論。它使得函數、速度、加速度和斜率等均可用一套通用的符號進行演繹。

積分(integral calculus)是透過累積細微的幾何量去求出整體，

為定義和計算長度、面積、體積等提供一套通用的方法。

其中細微就是本章所要討論的主角：極限。

無窮的意義

維基百科:「無窮或無限，其數學符號為∞。來自於拉丁文的「infinitas」，即「沒有邊界」的意思。在數學方面的一些主題或概念中，無窮被認為是一個超越邊界而增加的概念，而不是一個數」

我們可以很容易的判別，無窮大加無窮大還是無窮大

(但不是兩倍的無窮大，因為無窮大只是一個"概念")，

同理，無窮大乘以無窮大還是無窮大。

但是無窮大減無窮大、無窮大除以無窮大就有不一樣的可能了，

例如：實數有無窮多個，正整數也有無窮多個，

但兩個數量相減、相除，就有不同的可能。

高中的極限考題，就著重在無窮大減無窮大以及無窮大除以無窮大的計算

無窮數列的極限

給予一個數列 $<a_n>$，如果存在一個定值 α

使得：

當 n 非常大 (n趨近於無窮大時)

$|a_n-\alpha|$ 可以小於任意正數 ($|a_n-\alpha|$趨近於0)

則稱：

數列 $<a_n>$ 收斂於 α，或稱 a_n 的極限爲 α

記作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$

立航心得語

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，意義就是

數列 $\langle a_n\rangle$ 有極限值 α，

$\langle a_n\rangle$ 稱為收斂數列。

如果沒有極限值，

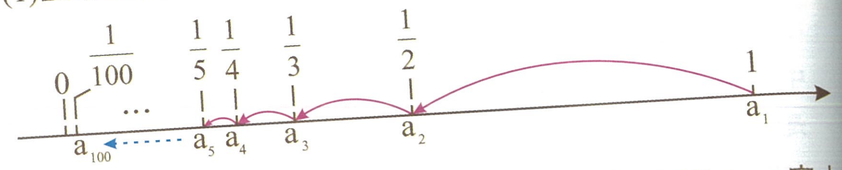
稱為發散數列。

1. 觀察當 n 越來越大時，數列會不會朝某一個定數趨近？

(1) $\langle a_n \rangle : \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots \frac{1}{100}, \cdots \frac{1}{n}, \cdots$　(2) $\langle b_n \rangle : 1,1,1,1,\cdots 1,\cdots$

【答案】▶(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$

【解析】▶(1)觀察數列在數線上的變化



發現隨著分母 n 越來越大，a_n 越來越接近 0，而且 a_n 一定大於

我們就說 $\langle a_n \rangle$ 收斂於 0，$\langle a_n \rangle$ 的極限值為 0，$\langle a_n \rangle$ 是收斂數列

(2)當 n 越來越大時，數列的每一項都是 1，

我們就說 $\langle b_n \rangle$ 收斂於 1，$\langle b_n \rangle$ 的極限值為 1，$\langle b_n \rangle$ 是收斂數列

2. 觀察當 n 越來越大時，數列會不會朝某一個定數趨近？

(1) $\langle a_n \rangle : 2, 2^2, 2^3, 2^4, \cdots\cdots, 2^n, \cdots$

(2) $\langle b_n \rangle : \log_{0.5}1, \log_{0.5}2, \log_{0.5}3, \log_{0.5}4, \log_{0.5}5, \cdots \log_{0.5}n, \cdots$

【答案】▶(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 不存在

【解析】▶(1)當 n 越來越大時，$\langle a_n \rangle$ 越來越大，

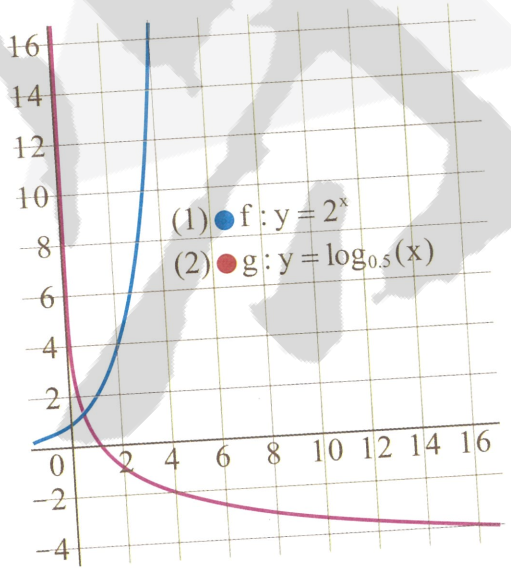
不會朝某一個定數趨近，

我們就說 $\langle a_n \rangle$ 沒有極限值，$\langle a_n \rangle$ 是發散數列。

(2)當 n 越來越大時，$\langle b_n \rangle$ 越來越小，

不會朝某一個定數趨近，

我們就說 $\langle b_n \rangle$ 沒有極限值，$\langle b_n \rangle$ 是發散數列。



3. 觀察當 n 越來越大時，數列會不會朝某一個定數趨近？

(1) $\langle a_n \rangle : -1, 1, -1, 1, \cdots\cdots (-1)^n, \cdots$

(2) $\langle b_n \rangle : \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots \frac{(-1)^n}{n}, \cdots$

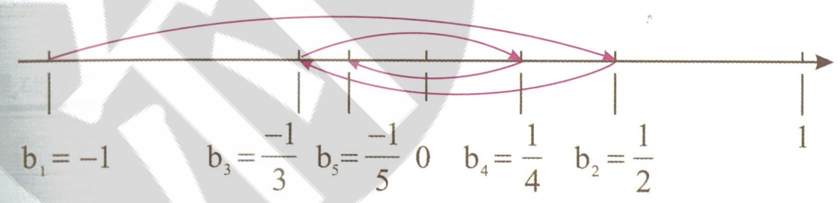
【答案】▶(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

【解析】▶(1)當 n 越來越大時，$\langle a_n \rangle$ 在 −1 與 1 兩數跳動，

不會朝某一個定數趨近，我們就說 $\langle a_n \rangle$ 沒有極限值，

$\langle a_n \rangle$ 是發散數列。

(2)觀察數列在數線上的變化



當 n 越來越大時，$\langle b_n \rangle$ 正負左右跳動，但持續朝 0 趨近，

我們就說 $\langle b_n \rangle$ 收斂於 0，$\langle b_n \rangle$ 的極限值為 0，

$\langle b_n \rangle$ 是收斂數列。

4. 觀察當 n 越來越大時，數列會不會朝某一個定數趨近？

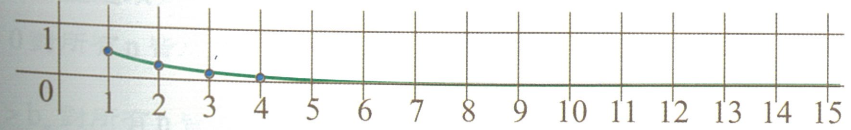
(1) $\langle a_n \rangle : \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \cdots\cdots \left(\frac{1}{2}\right)^n, \cdots$

(2) $\langle b_n \rangle : -\frac{1}{2}, \left(-\frac{1}{2}\right)^2, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^4, \cdots\cdots \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \cdots$

【答案】▶(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

【解析】▶(1)隨著 n 越來越大，a_n 越來越接近 0，而且 a_n 一定大於 0

我們就說 $\langle a_n \rangle$ 收斂於 0，$\langle a_n \rangle$ 的極限值為 0，$\langle a_n \rangle$ 是收斂數列。



(2)當 n 越來越大時，$\langle b_n \rangle$ 正負左右跳動，但持續朝 0 趨近，

我們就說 $\langle b_n \rangle$ 收斂於 0，$\langle b_n \rangle$ 的極限值為 0，$\langle b_n \rangle$ 是收斂數列。

立航心語

請注意，
等比數列/級數
限制 $r\neq 0$

無窮等比數列的極限

數列 $\langle a_n\rangle : a$，ar，ar^2，ar^3，……，ar^{n-1}，……

可由數線上的表現直接觀察：

(1) $-1<r<1$ 時 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (收斂數列)

(2) $r=1$ 時 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (收斂數列)

(3) $r\leq -1$ 或 $r>1$ ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在(發散數列)

<結論> 無窮等比數列 $\langle r^n\rangle$ 收斂的充要條件為

$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$

其中：$-1<r<1$ 時 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \boxed{\quad}$

$r=1$ 時 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \boxed{\quad}$

5. 判斷下列各無窮數列為收斂或發散數列，若為收斂數列，求其極限。
(1) $\langle (0.99)^n\rangle$　(2) $\langle (\sqrt{2}-1)^n\rangle$　(3) $\langle (\frac{8}{7})^n\rangle$　(4) $\langle 1+\frac{1}{n}\rangle$

【答案】▶(1) 0　(2) 0　(3)發散數列　(4) 1

【解析】▶

6. 試求下列二式之極限 $(m\cdot n>0)$
(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{m}{m+1})^n=$ ______　(2) $\lim\limits_{m\to\infty}(\frac{m}{m+1})^n=$ ______

【答案】▶(1) 0　(2) 1

【解析】▶

隨堂測試

試求下列二式的極限

① $\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n^2})$　② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}$　③ $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n}-\frac{n}{n-1})$

⇨① 6　② 0　③ 0

講道理 ↗ 道理說清楚，就是好的開始

我們已經學會數列極限的定義，同時也清楚其實可以採取直觀的代入 $\boxed{n\to\infty}$ 觀察結果為何

其中有二種型式 $\frac{\infty}{\infty}$ 及 $\infty-\infty$ 需要再處理才能確認其極限，請！

$\frac{\infty}{\infty}$ 型的極限

對於無窮數列的極限，可採取直觀的代入 $\boxed{n\to\infty}$，

若是碰到 $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ 型的式子，則應

$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$

然後再代入 $\boxed{n\to\infty}$ 求極限

7. 試求下列二式的極限
① $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$　② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n+8^n-9^n}{2^{3n+1}+3^{2n+1}}$

【答案】▶① 1　② $-\frac{1}{3}$

【解析】▶

立航心語

直接代入，若是碰到 $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ 型的式子

⇨ $\boxed{\quad\quad}$

隨堂測試

1. 設 n 為正整數，方程式 $x^2-2x-n=0$ 的兩根為 a_n 與 b_n，且 $a_n>b_n$。
試問下列哪些選項是正確的？
(1) $a_n>0$ 對所有 n 皆成立　(2) $a_n+b_n=2$ 對所有 n 皆成立
(3) $b_{n+1}>b_n$ 對所有 n 皆成立　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{n}=1$　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}=2$
⇨(1)(2)(4)(5)

2. 設 $a=0.9$，$b=1.1$，$c=1.01$，以及 $x_n=\frac{\alpha a^n}{1+a^n}+\frac{\beta b^n}{1+b^n}+\frac{\gamma c^n}{1+c^n}$，
$n=1,2,3,\cdots$，式中 α、β、γ 為任意實數，則極限值 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$
(A) 0　(B) $\alpha+\beta+\gamma$　(C) $\alpha+\beta$　(D) $\beta+\gamma$　(E) $\alpha+\gamma$
⇨(D)

8. 設 $a, b \in R$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+5}{5n+10}=2$，則 $(a,b)=$ ________。

【答案】▶$(0,10)$

【解析】▶

9. 試求下列三式的極限

① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+1}{n^2+n}$　② $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-n+3}{n^3+2n^2+n+1}$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n^2-2n-6}{6n^2+2n+1}$

【答案】▶① 3　② 0　③不存在

【解析】▶

立航心語

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+c}{pn^2+qn+r}=\boxed{}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an+b}{pn^2+qn+r}=\boxed{}$

1. 設 $k\in N$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+2}-4^{n+1}}{2^{n+1}+2\cdot 4^{n+k}}=-\dfrac{1}{8}$，則 $k=$ ________。

⇨$k=2$

2. 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}=$ ________。

⇨3

3. 考慮多項式函數 $f(x)=x^5+2x^4-x^3-5x^2+3$，試求

$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(k)}{f(k+100)}=$ ________ (k 爲正整數)

⇨1

數列極限的四則運算性質

設 $<a_n>$ 與 $<b_n>$ 皆爲收斂數列，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$，$c$ 是常數，則

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n)=c\alpha=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\alpha\cdot\beta=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$ ($b_n\neq 0$，$\beta\neq 0$)

<注意>

(1)設 $\langle a_n\rangle$ 是一個收斂數列，$\langle b_n\rangle$ 是一個發散數列，則其四則運算

a_n+b_n 一定發散 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+n^{1000})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^{1001}+1}{n})=\infty$ (發散)

a_n-b_n 一定發散 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}-n^{1000})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-n^{1001}+1}{n})=-\infty$ (發散)

$a_n\times b_n$ 不一定發散 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\cdot n)=\lim\limits_{n\to\infty}(1)=1$ (收斂)

$\dfrac{a_n}{b_n}$ 不一定發散 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\frac{1}{n}}{(-1)^n})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{(-1)^n}{n})=$ (收斂)

(2)設 $\langle a_n\rangle$ 是一個發散數列，$\langle b_n\rangle$ 是一個發散數列，則其四則運算

a_n+b_n 不一定發散 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(n^{1000}+(-n^{1000}))=\lim\limits_{n\to\infty}(0)=0$ (收斂)

a_n-b_n 不一定發散 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(n^{1000}-n^{1000})=\lim\limits_{n\to\infty}(0)=0$

$a_n\times b_n$ 不一定發散 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n\cdot(-1)^{n+1})=-1$ (收斂)

$\dfrac{a_n}{b_n}$ 不一定發散 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n})=-1$ (收斂)

10. 設 $<a_n>$ 為一個數列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4a_n-2}{3a_n+1}=\dfrac{1}{2}$，則

(1)證明 $<a_n>$ 是一個收斂數列　(2)試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ________

【答案】▶(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

【解析】▶令 $b_n=\dfrac{4a_n-2}{3a_n+1}$，左右同乘 $(3a_n+1)$

$3b_na_n+b_n=4a_n-2\ \rightarrow\ 2+b_n=(4-3b_n)a_n\ \rightarrow\ a_n=\dfrac{2+b_n}{4-3b_n}$　由已知 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1}{2}\rightarrow\langle b_n\rangle$ 收斂

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+b_n}{4-3b_n}=\dfrac{2+\lim\limits_{n\to\infty}b_n}{4-3\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{2+\frac{1}{2}}{4-3\times\frac{1}{2}}=1$　故 $\langle a_n\rangle$ 收斂